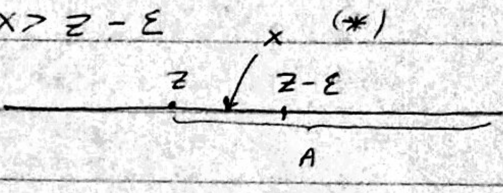
(A_{12}): Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει sup.

<u>ΠΡΟΤ</u> Έστω A ένα μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $z \in \mathbb{R}$ τότε:

$$z = \sup A \iff \begin{cases} z \text{ είναι άνω φράγμα του } A \\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in A)\quad x > z - \varepsilon \quad (*) \end{cases}$$



<u>Απόδ.</u> ($\Rightarrow$)

Έστω $z = \sup A$. Τότε z είναι άνω φράγμα του A
Έστω δεν ισχύει του (*). Άρα:

$(\exists\ \underline{\varepsilon_0 > 0})(\forall x \in A)\ x \leq z - \varepsilon_0 \Rightarrow \underline{z - \varepsilon_0}$ άνω φράγμα του A.

Άρα $z - \varepsilon_0 \geq \sup A = z \iff \frac{z - \varepsilon_0}{z} \geq 0 \Rightarrow \underline{\varepsilon_0 \leq 0}$, άτοπο!

($\Leftarrow$)

Έστω ισχύει η (*) και ότι z δεν είναι το $\sup A$.

Άρα υπάρχει άνω φράγμα κ του A, με $\kappa < z$

Δηλ: $z - \kappa > 0$

Για $\varepsilon = z - \kappa$ η (*) δίνει:
$(\exists x \in A)\quad x > z - (z - \kappa) \Rightarrow \underline{x > \kappa}$, άτοπο!

$A \subseteq \mathbb{R}$

A επαγωγικό σύνολο $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \in A \\ (\forall x \in A) : x+1 \in A \end{cases}$

$\mathcal{N}$ συλλογή όλων των επαγωγικών του $\mathbb{R}$

$\mathbb{R} \in \mathcal{N} \neq \emptyset$

$\mathbb{N} = \cap \mathcal{N}$, $\mathbb{N}$ σύνολο των φυσικών αριθμών

<u>ΠΡΟΤ</u> Το $\mathbb{N}$ είναι επαγωγικό σύνολο, και μάλιστα το ελάχιστο ($\subseteq$) επαγωγικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

$(\forall X \in \mathcal{N})\ 1 \in X \rightarrow 1 \in \cap \mathcal{N}$

$x \in \cap \mathcal{N} \Leftrightarrow (\forall X \in \mathcal{N})\ x \in X \xRightarrow{X \text{ επαγ.}} (\forall X \in \mathcal{N})\ x+1 \in X$

$\Rightarrow x+1 \in \cap \mathcal{N}$

Δηλ: $\cap \mathcal{N} = \mathbb{N}$ επαγωγικό σύνολο

$(\forall X \in \mathcal{N})\ \mathbb{N} = \cap \mathcal{N} \subseteq X$

Το $\cap \mathcal{N} = \mathbb{N}$ είναι κάτω φράγμα ($\subseteq$) της $\mathcal{N}$

<u>ΠΡΟΤ</u> (<u>Αρχιμήδεια Ιδιότητα</u>) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})\ n > x$ (*)

<u>Αποδ.</u> Έστω δεν ισχύει το (*)

Τότε $(\exists x_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \leq x_0 \Rightarrow$ Το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο.

5 Από $\xrightarrow[\text{το αξίωμα } (A_{12})]{\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}}$ $\exists \sup \mathbb{N}$

Έστω n τυχόν : $n \in \mathbb{N}$

Τότε $n+1 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n+1 \leq \sup \mathbb{N}$

$\Rightarrow n \leq \underline{\sup \mathbb{N} - 1}$ $\Rightarrow$ $\sup \mathbb{N} - 1$ άνω φράγμα του $\mathbb{N}$

Άρα $\sup \mathbb{N} \leq \sup \mathbb{N} - 1$, <u>Άτοπο!</u>

<u>ΠΡΟΤ</u> Στο $\mathbb{N}$ ισχύουν τα εξής:

i) $(\forall x, y \in \mathbb{N})$: $x+y \in \mathbb{N}$ κ' $xy \in \mathbb{N}$

ii) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^+$

iii) $1 = \min \mathbb{N}$

iv) $0 \notin \mathbb{N}$

v) $(\forall n \in \mathbb{N})$ ισχύει

$n > 1 \Rightarrow n-1 \in \mathbb{N}$

<u>Αποδ</u> Έστω $x \in \mathbb{N}$

$A_x = \{ z \in \mathbb{R} : x+z \in \mathbb{N} \}$ Θδο A_x επαγωγικό

$1, \; x \in \mathbb{N} \xRightarrow{\mathbb{N} \text{ επαγ.}} x+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 \in A_x$

τυχόν $\underline{y \in A_x} \Rightarrow x+y \in \mathbb{N} \xRightarrow{\mathbb{N} \text{ επαγ}} (x+y)+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow x+(y+1) \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\underline{y+1 \in A_x}$

Άρα A_x είναι επαγωγικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. $\xRightarrow[\text{επαγ.}]{\mathbb{N} \text{ ελαχ.}}$

$\mathbb{N} \subseteq A_x$ (*)

Θεωρώ τυχόν $y \in \mathbb{N} \xRightarrow{\mathbb{N} \subseteq A_x\ (*)} y \in A_x$

$\Rightarrow \underline{x + y \in \mathbb{N}}$

→ Να αποδειχθεί το $x \cdot y \in \mathbb{N}$

<u>Αποδ</u> ii) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^+ = \{ x \in \mathbb{R} : x > 0 \}$

Αρκεί ν.δ.ο το $\mathbb{R}^+$ επαγωγικό

$1 > 0 \Rightarrow 1 \in \mathbb{R}^+$

$\underline{x \in \mathbb{R}^+} \Rightarrow x > 0 \xRightarrow[(A_{10})]{1 > 0} x + 1 > 0 \Rightarrow \underline{x + 1 \in \mathbb{R}^+}$

Δηλ το $\mathbb{R}^+$ είναι επαγωγικό σύνολο.

<u>Αποδ) iii)</u>

Θ.δ.ο A επαγωγικό. $A = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \}$

Τότε $\mathbb{N} \subseteq A \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{N})\ x \in A \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{N})\ x \geq 1 \xRightarrow{1 \in \mathbb{N}}$

$1 = \min \mathbb{N}$

$1 \in A$

$x \in A \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x + 1 \geq 1 + 1 > 1 \Rightarrow x + 1 \geq 1$

<u>Αποδ) iv)</u> $0 \notin \mathbb{N}$

$\min \mathbb{N} = 1 > 0 \Rightarrow 0 \notin \mathbb{N}$

<u>Αποδ) v)</u>

$S = \{1\} \cup \{ n \in \mathbb{N},\ n - 1 \in \mathbb{N} \}$

$1 \in \mathbb{N}$

Όμοια, $n \in S'$ ώ $n \neq 1 \Rightarrow n-1 \in \mathbb{N} \xRightarrow{\mathbb{N}\text{ επαγ.}} (n+1)+1 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n+1 \in S'$

Άρα S' επαγωγικό.

S' επαγωγικό $\xRightarrow{\mathbb{N}\text{ ελάχιστο επαγ.}}$ $\mathbb{N} \subseteq S$

Άλλα $S \subseteq \mathbb{N}$

$\Longrightarrow S = \mathbb{N}$